Systèmes Dynamiques

Analyse et Stabilité

AO 102

Frédéric Jean

UMA – pièce 2.4.25

Frederic.Jean@ensta-paristech.fr

Plan du cours

1. **Introduction + Calcul différentiel**
2. **Exercices de Calcul différentiel (3h de TD)**
3. **Théorie générale des ED :** $x'(t) = f(x(t))$
4. $\boxed{\textbf{Cas linéaire autonome :} \quad x'(t) = Ax(t)}$
5. **Linéarisation & ED linéaires non autonomes :**
   $\delta x' = Df(x(t)) \cdot \delta x \quad \& \quad x'(t) = A(t)x(t)$
6. **Équilibres et stabilité,**
   $x' = f(x)$ **vs** $\delta x' = Df(x_0) \cdot \delta x$

Plan de la séance

1. Introduction
2. Exponentielle de matrices
3. Réduction de Jordan
4. Forme générale des solutions de $x'(t) = Ax(t)$

ED linéaires autonomes

- ED autonome générale : $x' = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- **Cas linéaire :** $f(x) = Ax$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$ [ou $\mathbb{C}^n$]

$$\Rightarrow \quad \boxed{x'(t) = Ax(t)}$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ [ou $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$]

Exemple ($n = 1$)

$$y'(t) = \alpha y(t), \qquad \text{avec } \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ y(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Solution : $y(t) = e^{\alpha(t-t_0)} y(t_0)$.

Plan de la séance

2. Exponentielle de matrices

Déf. $\quad \exp : A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in M_n(\mathbb{R})$

- $f(t) = e^{tA}$ dérivable, $f'(t) = e^{tA}A = Ae^{tA} = Af(t)$.
- Si P inversible, $\quad Pe^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$

Théorème

L'unique solution de $x'(t) = Ax(t)$ t.q. $x(t_0) = x_0$ est

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$\Rightarrow \quad \phi_t = e^{tA}$ et ED complète.

$\longrightarrow$ il suffit de savoir calculer e^{tA} ! $\quad$ ... et en fait $e^{tPAP^{-1}}$ suffit

- Principe : quand A est diagonalisable, c-a-d,

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

alors $$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Comment faire dans le cas général ?

Plan de la séance

1. Introduction
2. Exponentielle de matrices
3. Réduction de Jordan
4. Forme générale des solutions de $x'(t) = Ax(t)$

- **Polynôme caractéristique :** $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$,

  Dans $\mathbb{C}$, $\quad P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$

  $$\text{où} \begin{cases} \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C} & \text{valeurs propres distinctes de } A\,; \\ p_1 + \cdots + p_r = n \end{cases}$$

- **Sous-espaces propres :** $\Pi_j = \Pi_{\lambda_j} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_j I)$,

  $$\dim \Pi_j \leq p_j$$

- **Sous-espaces caractéristiques :** $\Gamma_j = \Gamma_{\lambda_j} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_j I)^{p_j}$

  $$\longrightarrow \quad \Pi_j \subset \Gamma_j \quad \text{et} \quad \Gamma_j \text{ invariant par } A$$

Rappel : $A \in M_n(\mathbb{C})$ **diagonalisable** (dans $\mathbb{C}$)

si $\exists$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A

Théorème de décomposition des noyaux

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r$$

$\Longrightarrow$ $\dim \Gamma_j = p_j$, *et*

$$A|_{\Gamma_j} = \lambda_j I|_{\Gamma_j} + N_j, \quad \textit{avec } N_j^{p_j} = 0.$$

Conséquence : $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_r$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dim \Pi_j = p_j \quad \forall j$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Pi_j = \Gamma_j \quad \forall j$$

$$\Longleftrightarrow \quad N_j = 0 \quad \forall j$$

Théorème de Jordan

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que*

$$A = P \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $J_j = \lambda_j I + N_j$ *matrice* $(p_j \times p_j)$.

Application au calcul de l'exponentielle

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{avec} \qquad e^{tJ_j} = e^{t\lambda_j}\Big(I + tN_j + \cdots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} N_j^{m_j-1}\Big).$$

où $m_j =$ plus petit m tel que $N_j^m = 0$.

N.B. $m_j = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Pi_j = \Gamma_j \quad \Leftrightarrow \quad N_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A|_{\Gamma_j} \ \text{diag}^{\text{ble}}$

Plan de la séance

Forme des solutions dans $\mathbb{C}^n$

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Toute solution de $x'(t) = Ax(t)$ dans $\mathbb{C}^n$ s'écrit

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r} e^{t\lambda_j}\Big(\sum_{k=0}^{m_j-1} t^k v_{j,k}\Big), \qquad \text{avec } v_{j,k} \in \Gamma_j.$$

En fait, dans la décomposition

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r,$$

si $x(0) = v_{1,0} + \cdots + v_{r,0}$, alors

$$x(t) = e^{t\lambda_1}\Big(\sum_k \frac{t^k}{k!} N_1^k\Big) v_{1,0} + \cdots + e^{t\lambda_r}\Big(\sum_k \frac{t^k}{k!} N_r^k\Big) v_{r,0}$$

Forme des solutions dans $\mathbb{R}^n$

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\quad P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{p_j} \prod_{j=s+1}^{q} [(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j)]^{p_j}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Toute solution de $x'(t) = Ax(t)$ dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$x(t) = \sum_{j=1}^{q} e^{\alpha_j t}\Big(\sum_{k=0}^{m_j-1} t^k \big[\cos(\beta_j t)\, a_{j,k} + \sin(\beta_j t)\, b_{j,k}\big]\Big),$$

où $\alpha_j = \Re e(\lambda_j)$, $\beta_j = \Im m(\lambda_j)$, et $a_{j,k}, b_{j,k} \in E_j$.

Sous-espaces réels :

$$\begin{cases} E_j = \Gamma_{\lambda_j} \cap \mathbb{R}^n, & 1 \le j \le s \\ E_j = (\Gamma_{\lambda_j} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_j}) \cap \mathbb{R}^n, & s+1 \le j \le q. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$$

En fait, dans la décomposition $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$,

$$x(t) = x_1(t) + \cdots + x_q(t) \qquad \text{avec}$$

$$\begin{cases} x_j(t) = e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{m_j-1} t^k a_{j,k}, & 1 \le j \le s \\ x_j(t) = e^{\alpha_j t} \sum_{k=0}^{m_j-1} t^k \big[\cos(\beta_j t)\, a_{j,k} + \sin(\beta_j t)\, b_{j,k}\big], & s+1 \le j \le q. \end{cases}$$

Comportement asymptotique

- si $\Re e(\lambda_j) > 0$, $\quad \|x_j(t)\| \longrightarrow \infty$ quand $t \to +\infty$;
- si $\Re e(\lambda_j) < 0$, $\quad x_j(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$;
- si $\Re e(\lambda_j) = 0$, deux possibilités :
  - $m_j = 1$: $\quad x_j(t)$ borné sur $\mathbb{R}$ (périodique) ;
  - $m_j > 1$: $\quad \|x_j(t)\| \longrightarrow \infty$ quand $t \to \pm\infty$

<u>Déf.</u>

$$E^s = \Big[\bigoplus_{\Re e \lambda_j < 0} \Gamma_j\Big] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re e \lambda_j < 0} E_j \qquad \text{esp. stable,}$$

$$E^u = \Big[\bigoplus_{\Re e \lambda_j > 0} \Gamma_j\Big] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re e \lambda_j > 0} E_j \qquad \text{esp. instable,}$$

$$E^c = \Big[\bigoplus_{\Re e \lambda_j = 0} \Gamma_j\Big] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re e \lambda_j = 0} E_j \qquad \text{esp. indifférent}$$

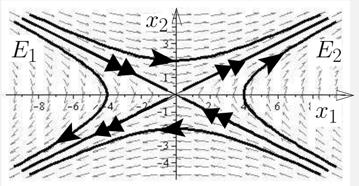
$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

Théorème (Caractérisation dynamique de E^s, E^u, E^c)

- $E^s = \{\, x(0) \in \mathbb{R}^n \;:\; \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \,\}$
- $E^u = \{\, x(0) \in \mathbb{R}^n \;:\; \lim_{t \to -\infty} x(t) = 0 \,\}$
- $E^c = \{\, x(0) \in \mathbb{R}^n \;:\; \exists C > 0$ t.q., pour $|t|$ grand,

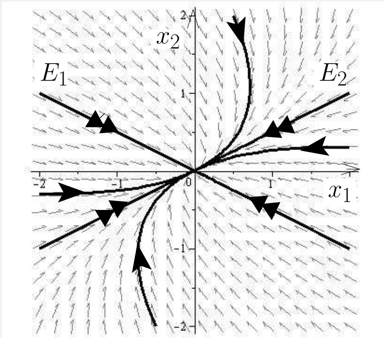
$$C^{-1}\, \|x(0)\| \;\le\; \|x(t)\| \;\le\; C\, |t|^n\, \|x(0)\| \,\}$$

Exemple : $A \in M_2(\mathbb{R})$, valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réelles



CAS $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$\Longrightarrow E^s = E_1$ et $E^u = E_2$



CAS $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$\Longrightarrow E^s = \mathbb{R}^2$

Conclusions

Pour $x' = Ax$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Toutes les solutions $\longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$

$\Longleftrightarrow$

toutes les valeurs propres de partie réelle < 0

Au moins une valeur propre de partie réelle > 0

$\Longrightarrow$ des solutions divergent